

13. Нестационарный процесс авторегрессии – интегрированного скользящего среднего $ARIMA(p,d,q)$.

Рассмотрим нестационарный ряд случайного блуждания. Его уравнение имеет вид: $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$. Если взять первую разность, равную $\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = (1 - L)x_t$, то уравнение сведется к следующему: $\Delta x_t = y_t = \varepsilon_t$. То есть в первых разностях ряд станет стационарным.

Рассмотрим ряд вида: $x_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t$.

Его плотностью детерминированная часть (тренд) является параболической функцией времени. Очевидно, что этот ряд нестационарный. Математическое ожидание этого процесса зависит от времени.

Проверим: Приводится ли такой ряд взятием последовательных разностей к стационарному?

Если мы возьмем первую последовательную разность, то получим: $\Delta x_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t - \alpha - \beta(t-1) - \gamma(t-1)^2 \varepsilon_{t-1} = \beta + 2\gamma t - \gamma + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$.

Степень полинома, описывающего тренд, понизилась на единицу. Если провести взятие второй разности, то останется $\Delta^2 x_t = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} = 2\gamma + (\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})$, то есть получим стационарный процесс.

НЕОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ АБЗАЦ(Правда, видно, как в уравнение начинает "проникать" скользящее среднее. Полученный двукратным взятием разностей стационарный процесс является процессом $MA(2)$. Но, по крайней мере, взятием последовательных разностей исходный ряд с квадратичным трендом приводится к стационарному виду..)

Бокс и Дженкинс на основании этого свойства предложили выделить класс нестационарных рядов, которые взятием последовательных разностей можно привести к стационарному виду, а именно к виду $ARMA$.

Если ряд после взятия d последовательных разностей приводится к стационарному, то этот ряд носит название $ARIMA(p, d, q)$.

$ARIMA$ - процесс авторегрессии - интегрированного скользящего среднего. При этом p - параметр AR -части, d - степень интеграции, и q - это параметр MA -части.

В операторном виде процесс $ARIMA(p, d, q)$ записывается как: $\alpha_p(L)\Delta^d x_t = \beta_q(L)\varepsilon_t$.

Или по-другому $\underbrace{\alpha_p(L)(1-L)^d}_{p+d} x_t = \beta_q(L)\varepsilon_t$.

Этот процесс x_t нестационарный, потому что здесь не выполняется условие, что все корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы.

Но, если обозначить $(1-L)^d x_t = y_t$, то y_t - это стационарный процесс.